Dowód poprawności pewnej metody

Piotr Zieliński

June 2, 2002

Niech $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będą punktami na płaszczyźnie. Koło (O, r) o srodku O i promieniu r jest *dobre* jeśli zawiera wszystkie punkty $p_1, \ldots, p_n$. Koło (O, r) jest *minimalne* jeśli jest dobre oraz nie istnieje dobre koło o promieniu mnieszym niż r. Pominę dowód, że minimalne koło zawsze istnieje.

Lemat 1. *Niech (O, r) będzie minimalmym kołem. Wówczas co najmniej jeden punkt p_i należy do okręgu (O, r).*

Dowód. Jeśli żaden z punktów p_i nie należy do okręgu, to maksymalna odległość punktu p_i od punktu O:

$$r' = \max_{1 \le i \le n} d(p_i, O)$$

jest mniejsza niż r. Zatem koło (O, r') jest dobre, więc (O, r) nie jest minimalne. □

Lemat 2. *Niech (O, r) będzie minimalnym kołem. Wówczas co najmniej dwa punkty p_i oraz p_j $(i \neq j)$ należą do okręgu (O, r).*

Dowód. Z lematu 1 wynika, że założenie nie jest spełnione tylko w przypadku, gdy dokładnie jeden punkt p_i należy do okręgu (O, r). Bez straty ogólności załóżmy, że $O = (0, 0)$ to początek układu współrzędnych, a $p_i = (r, 0)$. Wówczas, dla odpowiednio małego $\varepsilon > 0$, koło $((\varepsilon, 0), r)$ jest dobre i jego brzeg nie zawiera żadnego punktu p_k, czyli (patrz lemat 1) nie jest minimalne, więc koło (O, r) również nie jest minimalne.□

Lemat 3. *Niech (O, r) będzie minimalnym kołem, takim że dokładnie dwa punkty p_i oraz p_j $(i \neq j)$ leżą na okręgu (O, r). Wówczas odcinek $p_i p_j$ jest średnicą tego okręgu.*

Dowód. Załóżmy, że $p_i p_j$ nie jest średnicą (O, r). Bez straty ogólności załóżmy, że $O = (0, 0)$ oraz $p_i = (x, y)$ i $p_j = (-x, y)$, gdzie $y > 0$. Wówczas istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że koło $((O, \varepsilon), r)$ jest dobre i jego brzeg nie zawiera żadnego punktu p_k. Sprzeczność. □

Lemat 4. *Niech (O, r) będzie minimalnym kołem, takim że co najmniej trzy punkty ze zbioru $\{p_1, \ldots, p_n\}$ leżą na jego brzegu. Oznaczmy te punkty jako $q_1, \ldots, q_m$. Wówczas isnieją takie trzy punkty q_i, q_j, q_k, że trójkąt $q_i q_j q_k$ nie jest rozwartokątny.*

Dowód. Załóżmy (bez straty ogólności), że punkty $q_1, \ldots, q_m$ są ułożone „po kolei" w kierunku ruchu wskazówek zegara oraz że każdy trójkąt $q_i q_j q_k$ jest rozwartokątny. Załóżmy ponadto, że kąt $\alpha = \angle q_m O q_1$ jest największym spośród kątów $\angle q_l O q_{l+1}$. Udowodnimy, że ten kąt musi być większy niż $180°$.

Załóżmy więc, że tak nie jest ($\alpha \le 180°$). Niech i będzie takie, że $\angle q_m O q_{i-1} \le 180°$, ale $\angle q_k O q_i \ge 180°$. Takie i istnieje (i jest różne od 1 oraz m), gdyż

1. $\angle q_m O q_1 \le 180°$, więc $i \ge 2$.
2. $\angle q_m O q_{m-1} = 360° - \angle q_{m-1} O q_m \ge 360° - \angle q_m O q_1 \ge 180°$ (skorzystaliśmy to z faktu, że kąt $\angle q_m O q_1$ jest największy). Dlatego też $i \le m - 1$.
3. Z założenia $2 \le m - 1$ (bo $m \ge 3$).

Z doboru punktu q_i wnioskujemy, że:

1. $\angle q_i O q_m = 360° - \angle q_m O q_i \le 180°$ oraz
2. $\angle q_1 O q_i = \angle q_m O q_{i-1} - \angle q_m O q_1 + \angle q_{i-1} O q_i \le 180° - (\angle q_m O q_1 - \angle q_{i-1} O q_i) \le 180°$
3. $\angle q_m O q_1 \le 180°$ z założenia.

Zatem trójkąt $q_1 q_i q_m$ nie jest rozwartokątny. Sprzeczność oznacza, że kąt $\angle q_1 O q_k > 180°$. W takim razie odpowiednio obracając wszystko wokół punktu O (który znowu przyjmujemy za równy początkowi układu współrzędnym) uzyskujemy sytuację, gdzie każdy punkt $q_l = (x_l, y_l)$, gdzie $y_l > 0$. Widać, że istnieje odpowiednio mały $\varepsilon > 0$, taki, że koło $((0, \varepsilon), r)$ jest dobre oraz nie zawiera żadnego punktu na brzegu. Sprzeczność z lematem 1 dowodzi tezy. □

Lemat 5. *Minimalnym kołem zawierającym dwa dane punkty A i B jest koło, którego średnicą jest AB.*

Dowód. Średnica to najłuższy odcinek zawarty w kole, więc owa średnica musi być co najmniej równa odległości punktu A od B. Reszta jest oczywista. □

Lemat 6. *Niech ABC będzie trójkątem nierozwartokątnym. Wówczas, okrąg opisany na trójkącie ABC jest minimalnym kołem zawierającym punkty ABC.*

Dowód. Z lematu 1 wynika że co najmniej dwa punkty ze zbioru $\{A, B, C\}$ należą do minimalnego koła. Jeśli są to dokładnie dwa punkty, powiedzmy A i B, lemat 2 mówi, że AB jest średnicą tego koła. Punkt C leży więc wewnątrz tego koła, co pociąga za sobą $\angle ACB > 180°$. Sprzeczność. Zatem wszystkie trzmy punkty A, B, C leżą na brzegu tego koła, co implikuje tezę. □

Twierdzenie 7. *Koło o największym promieniu spośród kół których średnicą jest $p_i p_j$ (typ 1) oraz kół opisanych na nierozwartokątnych trójkątach $p_i p_j p_k$ (typ 2) jest minimalnym kołem zawierającym wszystkie punkty $p_1, \ldots, p_n$.*

Dowód. Lematy 5 oraz 6 mówią że koła typów odpowiednio 1 i 2 są minimalnymi kołami dla podzbiorów zbioru $\{p_1, \ldots, p_n\}$ zatem nie mogą mieć większego promienia niż minimalne koło dla całego zbioru.

Wystarczy zatem udowodnić, że minimalne koło dla całego zbioru jest jednym z kół typu 1 lub 2. Mamy dwa przypadki do rozważenia:

1. Minimalne koło ma dokładnie dwa punkty p_i, p_j $(i \neq j)$ na brzegu. Wówczas lemat 2 mówi, że jest to koło typu 1.

2. Minimalne koło ma więcej niż dwa punkty p_i na brzegu. Wówczas lemat 4 mówi, że jakieś trzy punkty spośród nich tworzą trójkąt nierozwartokątny, czyli koło jest typu 2. □